数理解析研究所講究録
1064巻 1998年 148-159

関孝和の解伏題之法について

竹之内 脩

1 解伏題之法について、序論

関孝和の遺した業績の中で、解伏題之法は、行列式を世界に先駆けて作ったとされ、よく知られている。しかし、関が、何の目的でこの議論を作ったのか、どのような過程を経て作ったのか、ということについては、あまり論じられていないように思われる。本論では、その点を中心に、論じてみたい。

解伏題之法は、わざわざ、伏題を解く之法、と読ませるように書いてあるが、かいふくだいの法でよいであろう。

次の六つの部分から成り立っている。

真虚第一、　両式第二、　定乗第三、　換式第四、
生尅(こく)第五、　寄消第六

この書物は、代数式の取り扱いを論じたものある。文字係数の代数方程式、行列式が扱われている。このうち、文字係数の代数方程式は、中国数学では、朱世傑の四元玉鑑に、二元式、三元式、四元式があるが、それとは全く扱いが別で、関の独創になるものである。

細かな説明が全くないので、理解し難い部分が多い。また、人によって解釈が異なる。([1],[3],[4]) ここでは、問題とすべき点をあげていくことを中心に考察を進めていく。

2 真虚第一

真術の得る所に従って、追って虚術を求める也、とあるが、真に求めたいものはしかじかであるが、それは直接には得られないので、別の量を未知数に置いて、それについて方程式をたて、この方程式から、真に求めるものについての方程式をつくる計算をする、というような意味であると思われる。

問題が3題あるのであるが、それをどう処理するつもりなのかが、示されていない。本稿の最後に林の論文 [3] を引用した。それによって、そのような主旨のものであるのかと、一応は納得されるけれども、それがその通りであるかどうかは、よくわからない。

I　直角三角形の三辺を $a,\ b,\ c\ (a<b<c)$ とする。$\sqrt{a}+c,\ a+b$ が与えられているとき、a はいくらか。

真術　a を得る。

虚術　$x=\sqrt{a}$ とする。

与えられた $\sqrt{a}+c$ から前式を得る。a から後式を得る。

書いてあるのはこれだけである。これだけでは何のことか、わからない。[3] では、これにもとづく解の方法についての考察がなされているので、本稿の最後にそれを述べる。

II　三角形の三辺を $a,\ b,\ c\ (a>b>c)$ とする。面積と、$b^3+c^3,\ a^3+b^3$ が与えられているとき、c はいくらか。

真術　c を得る。

1° 虚術　$x=a$ とする。

面積、$b,\ c$ により、前式を得る。a^3 により、後式を得る。

2° 虚術　$x=b$ とする。

面積、$a^3,\ c$ により、前式を得る。b^3 により、後式を得る。

III　5 個の正方形 A, B, C, D, E がある。A, B の面積の差、B, C の面積の差、C, D の面積の差、D, E の面積の差と、五つの正方形の一辺の長さの和が与えられているとき、正方形 A の一辺の長さを求めよ。

真術　正方形 A の一辺の長さを求める。

1° 虚術　$x=$ D の一辺の長さ

E の面積、D, E の一辺の長さの和から、前式を得る。D の面積から後式を得る。

2° 虚術　$x=$ C の一辺の長さ

D の面積、E の面積、C, D, E の一辺の長さの和から、前式を得る。C の面積から後式を得る。

3° 虚術　$x=$ B の一辺の長さ

C の面積、D の面積、E の面積、B, C, D, E の一辺の長さの和から、前式を得る。B の面積から後式を得る。

この虚術を順に、次のものの真術にする形でやっていくのである。

3　両式第二

ここでは、例題で式のたて方を述べている。

正四角錐台がある。その体積と、下の面の 1 辺の長さと高さの和、および下の面の 1 辺の長さの 2 乗と高さの 2 乗の和が与えられたとき、上の面の 1 辺の長さを求めよ。

以下は、その解である。これは天元術と傍書法のミックスで書かれている。ここにはじめて傍書法が本格的に使われているのであるが、一応、普通の数式の形で書く。以下前式、後式の原文の形を示す。

以下では、上の面の 1 辺の長さ (上方とよぶ) を a、下の面の 1 辺の長さ (下方とよぶ) を b、高さを h、体積を V とする。

問題は、

$V,\quad b+h=A,\quad b^2+h^2=B$ を与えて　a を求めよ

ということである。ここで、

$$V=\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)$$

という式が使われる。

いま、虚術として、h に関する方程式を作る。

体積、下方と高さの和、下方の 2 乗と高さの 2 乗の和が与えられているから、上方がわかる。

前術　和 A から高さ h を引くと、下方である。$A-h$

これを 2 乗する。$A^2-2Ah+h^2$

上方 a を 2 乗する。a^2

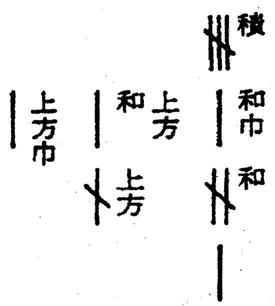
上方 a と下方を乗ずる。$aA-ah$

この三つを足して高さを掛けると、体積 V の 3 倍となる。

$$(A^2+aA+a^2)h+(-2A-a)h^2+h^3$$

$3V$ を引いて前式とする。

$$-3V+(A^2+aA+a^2)+(-2A-a)h+h^2=0 \qquad (*)$$

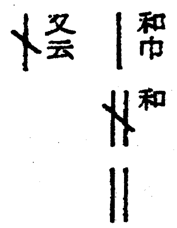


後式　下方 $A-h$ の 2 乗に、高さ h の 2 乗を加える。

$$A^2-2Ah+2h^2$$

これが B に等しいから、上と消して、次の後式を得る。

$$(A^2-B)-2Ah+2h^2=0$$



これで解は終わり、この後に次のコメントがついている。

> 以上のことは、数で式を求めているのではない。h の何乗というところの項の正負と、そこに加減相乗するものの名を傍らに記してあるのである。h の同じ累乗の位置で、正負同じものは加え、異なるものは減ず。

これは、正しく文字係数の扱い方で、これによって、関は、文字係数の扱いを確立したのだ、といえる。

以下は、式を簡略する方法をいろいろ述べている。

署　次数の高い式で、低い式と同じところがあれば、加減によって省略できる。もし、次数の低い式を 2 乗、3 乗して同じところがでてくれば、それも省略できる。

省　係数に同じ文字が因子としてかかっていたら、これを省略する。

約　数係数で共通の約数があったら、それで約する。

縮　x^2 の式になるような場合には、それを新しい未知数として、簡単にする。

4　定乗第三

上のようにして真術の未知数の多項式を係数にもつ方程式を 2 乗、3 乗したとき、係数の多項式が何次の式になるかを問題にしている。

そして、また、簡約の方法を論ずる。

畳　二つの式で、一番次数の低いところどうし、あるいは一番次数の高いところどうしが数係数であった場合は、片方の次数を下げることができる。

括　各次数のところの係数が複雑なときは、これをひとまとめに一つの文字で置き換えて、あとからもとに戻して計算する。

5　換式第四

ここでは、上の問題で扱ったような、方程式がいくつかでてきたとき、それから、次数の低い方程式を導くことを述べている。以下で、x の係数は、他の変数を含んだ式になっていて、簡略した結果は、x を消去した、それらの変数の方程式が出来上がることを注意する。

(a)　$b+ax=0,\quad d+cx=0$　のとき

a を第二式に掛け、c を第一式に掛けて引く。

$$ad-bc=0$$

(b)　$c+bx+ax^2=0,\quad f+ex+dx^2=0$　のとき

a を第二式に掛け、d を第一式に掛けて引く。

$$(af-dc)+(ae-db)x=0$$

c を第二式に掛け、f を第一式に掛けて引く。(そして、x で割る)

$$(ce-fb)+(cd-fa)x=0$$

(この後の式を作るのに、関は面倒なことをやっていて、いささか不思議である。)

(c)　3 次式二つの場合

$$\begin{aligned} -ax^3+bx^2+cx-d &= 0 \\ ex^3+fx^2-gx-h &= 0 \end{aligned}$$

から、次の 2 次式三つができる。

$$\begin{aligned} (-af-be)x^2+(ag-ce)x+(ah+de) &= 0 \\ (-ag-ce)x^2+(ah-bg-cf+de)x+(-bh+df) &= 0 \\ (ah+de)x^2+(-bh+df)x+(-ch-dg) &= 0 \end{aligned}$$

そして、また簡約の法を論ずる。

芟(さん)　芟というのは、草刈り鎌のことである。各次数の項の係数に同じ文字があったら、これを省略する、というので、これは行列式になったときはそれでよいが、式としては意味が変わってしまう。

治　数の係数で、各式で共通因数があれば、それで割り、つぎに各次数の項の係数に共通因数があれば、それで割る。あとの操作では、芟と同様、式の意味は変わってしまう。

6　生尅第五

ここは、たいへんよく知られた、そして関の最大の業績にあげられている行列式をつくるところである。ところが、何も説明がないので、どのようにしたのか、よくわからない。

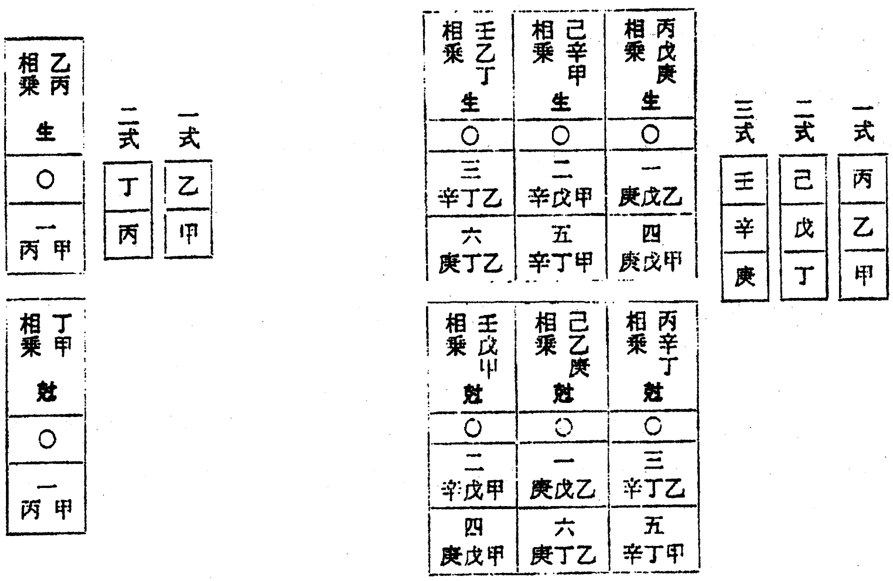
生というのはプラス、尅(こく)というのはマイナスのことで、下の各項につける符号のことである。

(a)　2 次の場合

これは、上の「換式」のところを書いたのだ、ということは知られる。

(b)　3 次の場合

何も説明がないので、どうやってこれを出してきたのかよくわからない。いろいろな試行錯誤の結果を整理したものである、と思われる。



まず、一式と二式を組み合わせて、「換式」(b) を適用する。

╲庚己	壬丁
╲庚戊	辛丁

╲丁丙	己甲
╲丁乙	戊甲

さらに「換式」(a) を適用する。

╲庚己丁乙	庚己戊甲	壬丁丁乙	╲壬丁戊甲	╲辛丁丁丙	庚戊丁丙	╲庚戊己甲	辛丁己甲

ここでの各項は、四つのものの積になっている。ところがプラスマイナスで消えるところが一つできるので、それを約し、その残りに共通因子 ”丁” があるので、それを約して、結局 6 個の項がでてくる。

╲庚己乙	壬丁乙	╲壬戊甲	╲辛丁丙	庚戊丙	辛己甲

それが式図の中の「生」、「尅」と書いた部分にあるものである。

二式と三式の組合せ、および三式と一式の組合せでやっても、同じようになる。ということで、この結果を書いたものと思われる。

ところでそうして並べてみると、最初の ”丙戊庚” というのは、一式の頭の ”丙” に ”戊庚” を掛けたものであるから、それを一式の各項に掛けて (こういうのを遍乗、あまねく掛ける、といっている)、”丙戊庚” の下の ”乙戊庚”、”甲戊庚” を作って書く。これを残りのところ 5 箇所

ついても同じようにやる。そうすると、一と一、二と二、三と三は、上に言ったプラスマイナスで消えるところになって、残るのが 6 個の項だけ、となる。

以上のようなプロセスかと考える。

ただ、上から 2 番目のところに○がある意味は、何であろうか。

(c)　4 次の場合

4 次の場合も、同じような式図が書いてあるが、省略する。

これらのことをやったあとで、以上のように、各項を掛け、生尅をつけて加えるのだが、掛ける数が多くて見やすくないから、次の交式、斜乗の方式を使う、といって、次のやり方を示している。

交式

n 次の行列式の中には、$n!$ 個の項がなくてはならない。つまり、

2 次 … 2 項、3 次 … 6 項、4 次 … 24 項、

5 次 … 120 項

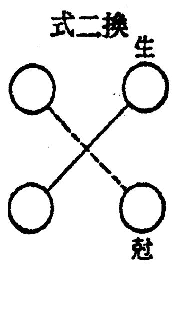
ところで、下の斜乗という方法でやると、

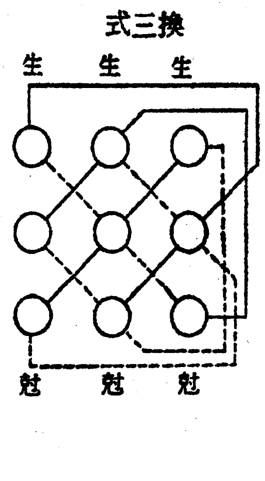
2 次 … 2 項、3 次 … 6 項、4 次 … 8 項、

5 次 … 10 項

しかでてこない。これでは、2 次、3 次の場合はよいが、それ以上になると、項の数を多くする工夫をしなくてはならない。その方法が、ここに述べられている。ただ残念なことに、5 次の場合は誤りがある。(敢えて、掲載しない)

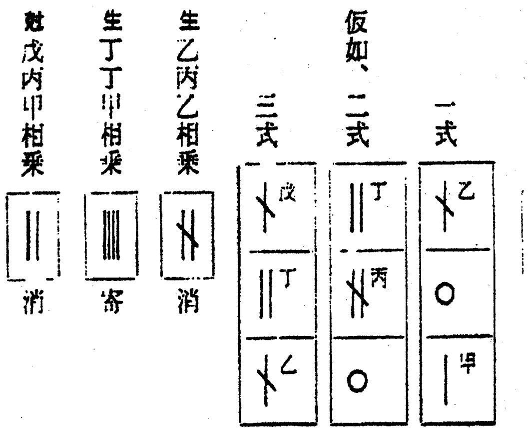
斜乗　下にあげた式図で、線で結んだ項の積を作り、実線のところにはプラス、点線のところにはマイナスの符号をつける。(われわれが今使っているのと、左右反対になる)





7 寄消第六

結びで、2 例をあげて、正負の符号に関して注意している。一例をあげる。



7.1 末尾

一番最後に、次のことが書いてある。

今まで第一から第六まで述べたことは、伏題を解する法である。一、二の例を挙げて、説明したが、書は言を尽くさない。学習する者は、すべからく、自分で考えて、はっきりと会得すべきものである。

8 和算における行列式の議論

以上述べたように、関の解伏題之法の議論は、どういう目的のものか、理解できないところが多い。実は、和算においては、関と同時代から、いろいろな人が行列式の議論をしている。以下にそれを挙げる。

関孝和　解伏題之法　(1683)
田中由真　算学紛解　(1683)
井関知辰　算法発揮　(1690)
関、建部　大成算経　(1710)
松永良弼　解伏題斜乗之諺解　(1715)
久留島義太　久氏遺稿
石黒信由　伏題数解　(1792)
菅野元健　補題解伏題正対篇　(1798)

9 石黒信由、伏題数解

[3] において、林は、石黒信由、伏題数解 (1792) が次のような解を与えていると述べている。

真虚第一、I (石黒信由の書から)

直角三角形の三辺を a, b, c $(a<b<c)$ とする。

$A=\sqrt{a}+c$, $B=a+b$ を与えて、a を求める。

真数　a

虚数　$x=\sqrt{a}$

前術　$A=x+c$ で、$a^2+b^2=c^2$ であるから、$(-a^2-b^2+A^2)-2Ax+x^2=0$

いま、〈括〉として、$\alpha=-a^2-b^2+A^2$ とすると、

〈前式〉　$\alpha-2Ax+x^2=0$

後術　$x=\sqrt{a}$ であるから、

〈後式〉　$-a+x^2=0$

これによって、〈両式〉を得た。

前式と後式の最高次の項の係数が同じだから、〈畳〉として引き算すると、引き算すると、次の式を得る。

〈換一式〉　$(-a-\alpha)+2Ax=0$

前式の第二項の $-2Ax$ を後式に掛け、後式の第二項の $0\cdot x$ を前式に掛けて引き算すると、次の式を得る。

$$2Aax-2Ax^3=0$$

ここで、〈換一式〉を使って、この式の次数下げ〈畳〉をする。すなわち、x^2 を掛けて加えると、

〈換二式〉　$2Aa+(-a-\alpha)x=0$

を得る。

このようにして、二つの 1 次方程式に還元した。

これから x を消去すると、

$$(a+\alpha)^2-4aA^2=0$$

α をもとに戻すと、

$$(A^2-b^2+a-a^2)^2-4aA^2=0$$

すなわち、

$$A^4+b^4-2A^2b^2+2(A^2-b^2)a+\{1-2(A^2-b^2)\}a^2-2a^3+a^4=0$$

ここで、$b=B-a$ であるから、それを代入すると、これは、a に関する高次方程式になる。その解法は、天元術でわかっているのだから、A, B の値が具体的に与えられたら、解が求められる。

真虚第一、II (石黒信由の書から)

三角形 ABC の三辺を a, b, c $(a > b > c)$ とする。

面積 S と、$M = b^3 + c^3$, $N = a^3 + b^3$ が与えられているとき、a を求める。

虚術として、$x = c$ に関する方程式を作る。

A から BC に垂線 AD を引くと、

$$a^2 + b^2 - x^2 = 2a \cdot \mathrm{CD}$$

$$2S = a \cdot \mathrm{AD}$$

2 乗すると、

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2(a^2 + b^2)x^2 + x^4$$
$$= 4a^2 \cdot \mathrm{CD}^2 = 4a^2(b^2 - \mathrm{AD}^2) = 4(a^2b^2 - 4S^2)$$

すなわち、

前式 $\quad a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 16S^2 - 2(a^2 + b^2)x^2 + x^4 = 0$

また、$x = c$ であるから、

後式 $\quad -c^3 + x^3 = 0$

〈畳〉の操作で、

$$a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 16S^2 + c^3x - 2(a^2 + b^2)x^2 = 0$$

いま、〈括〉として、

$$\alpha = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 + 16S^2$$

$$\beta = a^2 + b^2$$

とすると、

変前式 $\quad \alpha + c^3x - 2\beta x^2 = 0$

これと、後式から、換式の操作で、次の二つの方程式が得られる。

$$2c^3\beta - \alpha x - c^3x^2 = 0$$

$$-c^6 + 2c^3\beta x - \alpha x^2 = 0$$

この 3 個の 2 次方程式から、斜乗によって、

$$\begin{vmatrix} -\alpha & -c^3 & 2\beta \\ 2c^3\beta & -\alpha & -c^3 \\ -c^6 & 2c^3\beta & -\alpha \end{vmatrix} = 0$$

すなわち、

$$-\alpha^3 - c^{12} + 8c^6\beta^3 - 6\alpha\beta c^6 = 0$$

が得られた。

しかし、ここからどうするのかわからない、と [3] にはある。

10 両式第二の例題の解

前節の要領で、両式第二で与えられた例題の解を考えてみる。

正四角錐台がある。その体積と、下の面の 1 辺の長さと高さの和、および下の面の 1 辺の長さの 2 乗と高さの 2 乗の和が与えられたとき、上の面の 1 辺の長さを求めよ。

上の面の 1 辺の長さ (上方とよぶ) を a、下の面の 1 辺の長さ (下方とよぶ) を b、高さを h、体積を V として、h に関して、次の 2 式を得た。

$$-3V + (A^2 + aA + a^2)h + (-2A - a)h^2 + h^3 = 0$$

$$(A^2 - B) - 2Ah + 2h^2 = 0$$

ここに、〈畳〉の操作を行えば、次の 2 次方程式が得られる。

$$-6V + (A^2 - B + 2aA + a^2)h + (-2A - 2a)h^2 = 0$$

ここに 2 次方程式 2 個を得たので、これに換式の操作を行えば、1 次方程式 2 個が得られる。そうすると、斜乗の方法で、h を消去して、a に関する方程式が得られるから、これを解くと、a が求められる。

11 結語

この最後に述べた考察が関の本当のねらいであったとすれば、これは、Leibniz の行列式とは、全く目的の異なるものであることになる。

関の議論には、1 次方程式は全く登場しないのであるし、また方程式の係数から作った行列式を扱っているのであるから、数係数の方程式の場合には、その意味は、全く無意味なものになる。

真術における未知数を含んだ文字方程式を扱い、したがってその未知数を含んだ行列式が登場して、その結果、新しいこの未知数に関する方程式ができて、それを解くことによって、真術として求めていた量を求める。これは、相当深遠な研究であると評価されるべきであろう。

また、[5] には、上記の和算における行列式の研究のうち、井関のしたことが述べられている。これは、行列式についての書物で、世界最初のものであるという。そして、その中には、関の業績では明らかでなかった問題の取り扱いについて、詳細が述べられている。井関の業績は、関のものよりやや後である。田中の業績は、関と同じ年になっている。関のものは、原稿として弟子に伝えられたものであるが、1683 年、重訂となっているので、それより以前に書かれたものであろうか。

この時代、他の人の研究を伝える何かがあったのだろうか。関、田中、井関は相互に知った間柄であったのだろうか。今まで、史実は何も教えないが、興味がもたれることである。

参考文献

[1] 日本学士院編、明治前日本数学史、岩波書店

[2] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編著、関孝和全集、大阪教育図書株式会社

[3] 林鶴一、The "Fukudai" (伏題) and Determinants in Japanese Mathematics.
東京数学物理学会記事 第二期 第五巻 1910

[4] 平山諦、関孝和–その業績と伝記–、恒星社

[5] 下平和夫、和算の歴史 (下)、富士短期大学出版部